15 Examentraining

15.1 Algemene vaardigheden

Bladzijde 147

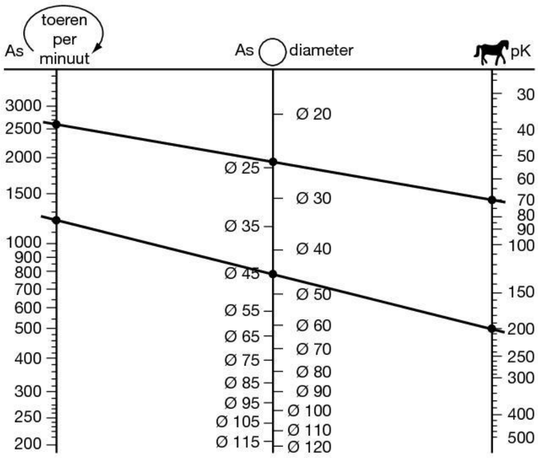
1 Voor het aandeel van de armen en handen geldt een relatieve toename van $\frac{21{,}0 - 18{,}15}{18{,}15} \times 100\% \approx 15{,}7\%$.

Voor het aandeel van de benen en voeten geldt een relatieve toename van $\frac{38{,}8 - 31{,}65}{31{,}65} \times 100\% \approx 22{,}6\%$.

De relatieve toename van het aandeel van de benen en de voeten is dus groter.

Bladzijde 148

2 **a**



Aflezen in de figuur geeft een asdiameter van ten minste 24 mm. De asdiameter van dit type is dus groot genoeg.

b Een groter vermogen betekent lager op de rechter as. Als je dan een lijn door 45 op de middelste as tekent, dan kom je hoger uit op de linker as. Hoger op de linker as betekent een hoger toerental.
Bij een groter vermogen hoort dus een hoger toerental.

Bladzijde 149

3 **a** Ze kan 6 keer een theekop en schotel kiezen voor 6 × 600 = 3600 punten.
Ze kan 8 theelepeltjes kiezen voor 8 × 450 = 3600 punten.
Ze kan 3 keer een theekop en schotel en 4 theelepeltjes kiezen voor 3 × 600 + 4 × 450 = 3600 punten.
Ze kan 3 theeglazen, 2 theelepeltjes en 1 kop en schotel kiezen voor 3 × 700 + 2 × 450 + 600 = 3600 punten.

b Elk artikel moet met tenminste 100 waardepunten worden betaald.
Deze 7 × 100 = 700 punten zijn 7 × 1,50 = 10,50 euro waard.
De overige 12 000 − 700 = 11 300 punten zijn 113 × 0,50 = 56,50 euro waard.
In totaal is de waarde van haar punten dus 10,50 + 56,50 = 67 euro.
Ze moet nog 6 × 9,30 + 46,50 − 67 = 35,30 euro bijbetalen.

4 aantal = $\binom{8}{2} \times \binom{8}{2} = 28 \times 28 = 784$

Bladzijde 150

5 **a**

	Lunteren	Dialect X			
zich	+	+	+	+	+
hem	−	−	+	+	+
z’n eigen	+	−	+	−	−
zichzelf	−	+	+	−	+
hemzelf	−	+	+	+	−

 © Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 151

b aantal = $\dfrac{267 \cdot 266}{2} = 35\,511$

6 **a** Er is keuze uit vijf kleuren voor ieder van de vier onderdelen van een vierkant.
Er kunnen dus $5^4 = 625$ verschillende vierkanten worden gemaakt.
b Het getal is $4 \times 125 + 1 \times 25 + 4 \times 5 + 0 \times 1 = 545$.

Bladzijde 152

7 **a** De afstand tussen Wilders en Thieme is $(29 - 24) + (29 - 29) + (21 - 10) + (31 - 29) + (25 - 12) + (9 - 8) + (8 - 6) + (12 - 8) + (4 - 1) + (2 - 2) + (1 - 0) = 42$.
$24 \cdot 2 = 48$, dus de voorspelling is niet meer dan tweemaal zo groot.

Bladzijde 153

b Als de voorspellingen gelijk zijn, dan is de afstand 0. Als de voorspellingen ongelijk zijn, dan heeft iemand meer zetels bij de ene partij voorspeld, maar bij diezelfde persoon zal hetzelfde aantal zetels bij een andere partij ontbreken. Er kunnen dus alleen even afstanden ontstaan.

15

c De maximaal mogelijke afstand is 300. De voorspellers mogen dan geen enkele zetel gemeenschappelijk hebben voorspeld. Er zijn elf partijen, dus elf voorspellers zouden allemaal 150 zetels kunnen voorspellen voor elk een andere partij. Als er twaalf voorspellers zijn of meer dan kan dat niet meer. Dus vanaf twaalf voorspellers is het niet langer mogelijk dat alle onderlinge afstanden 300 zijn.

8 Voor de achterste rij zijn er 4! = 24 mogelijkheden.
Voor de voorste en middelste rij zijn er inclusief het reservehuisje $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 3\,628\,800$ mogelijkheden.
In totaal zijn er $24 \cdot 3\,628\,800 = 87\,091\,200$ mogelijkheden.

Bladzijde 154

9 **a** Mevrouw De Wilde heeft 9 dienstjaren tussen 40 en 50 jaar en 5 dienstjaren vanaf 50 jaar.
Dat geeft $A = 9 \cdot 1{,}5 + 5 \cdot 2 = 23{,}5$.
Haar ontslagvergoeding is $23{,}5 \cdot 3464 \cdot 0{,}75 = 61\,053$ euro.

Bladzijde 155

b Er geldt $20{,}5 \cdot B \cdot 1 = 91\,700$, dus $B = \dfrac{91\,700}{20{,}5} \approx 4473$.

16 dienstjaren voor 40 jaar betekent 11 dienstjaren voor 35 jaar en 5 erna.
In de nieuwe situatie geldt dus $A = 11 \cdot 0{,}5 + 8 \cdot 1 = 13{,}5$.
Dus de nieuwe ontslagvergoeding is $13{,}5 \cdot 4473 \cdot 1 = 60\,386$ euro.

$\dfrac{60\,386 - 91\,700}{91\,700} \times 100\% \approx -34{,}1\%$, dus de ontslagvergoeding is 34,1% lager.

c Voor elke leeftijd is de nieuwe weegfactor kleiner of gelijk aan de oude weegfactor. Er is dus geen situatie mogelijk waarbij de werknemer erop vooruit gaat in de nieuwe regeling.

10 **a** aantal = $2^8 = 256$
b Per seconde $2 \cdot 44\,100 \cdot 2 = 176\,400$ bytes.
Op een cd kan dus $\dfrac{783 \cdot 10^6}{176\,400} = 4438{,}77...$ seconden ≈ 74 minuten muziek worden opgeslagen.
c Als je 6 enen gebruikt, dan is er nog plek voor $14 - 6 = 8$ nullen.
Tussen 6 enen moeten minstens $5 \times 2 = 10$ nullen staan en dat kan niet, want er is maar ruimte voor 8 nullen.
Het is dus niet mogelijk om een code met 6 enen te hebben.

Bladzijde 156

11 **a** De zilverkleurige ring kan op 6 plaatsen zitten.
Voor de gekleurde ringen zijn er $8^5 = 32\,768$ mogelijkheden.
Voor de 'vlag' zijn er 5 mogelijkheden.
In totaal zijn er $6 \cdot 32\,768 \cdot 5 = 983\,040$ mogelijkheden.
b In de periode 2010 – 2040 gaan de grafieken verder uit elkaar lopen. Het percentage lepelaars dat op de wadden leeft neemt dus af.

Bladzijde 157

12 **a** In de eerste ronde levert dat $500 \cdot 20 = 10\,000$ euro op, in de tweede ronde $625 \cdot 20 = 12\,500$ euro, in de derde ronde $833 \cdot 20 = 16\,660$ euro, in de vierde ronde $1250 \cdot 20 = 25\,000$ euro en in de vijfde ronde $2500 \cdot 20 = 50\,000$ euro.
De kandidaat wint $10\,000 + 12\,500 + 16\,660 + 25\,000 + 50\,000 = 114\,160$ euro.

b In één keer wegspelen levert $12\,500 \cdot 4 = 50\,000$ euro op.
Eén voor één wegspelen levert $12\,500 + 16\,667 + 25\,000 + 50\,000 \approx 104\,167$ euro op.
Het verschil is $104\,167 - 50\,000 = 54\,167$ euro.

c Mogelijke volgordes zijn:
1-1-2, 1-2-1, 2-1-1
1-3, 3-1
2-2.
Samen met de twee reeds genoemde mogelijkheden zijn er dus 8 verschillende mogelijkheden om de laatste vier spelers weg te spelen.

d Als de winnaar in de laatste ronde 1 speler wegspeelt, dan levert dat 50 000 euro op.
Als de winnaar in de laatste ronde twee of meer spelers wegspeelt, dan leveren die samen ook 50 000 euro op. Je wint dus altijd minstens 50 000 euro.

15.2 Werken met formules

Bladzijde 163

13 **a** Aflezen uit de grafiek van $D = 60$ en $P = 400$ en invullen in de formule geeft

$$79{,}78 \cdot \sqrt[3]{\frac{400}{R}} = 60$$
$$\sqrt[3]{\frac{400}{R}} = 0{,}752...$$
$$\frac{400}{R} = 0{,}752...^3 = 0{,}425...$$
$$R = \frac{400}{0{,}425...} \approx 940$$

Dus het toerental is ongeveer 940.

b
$$79{,}78 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{R}} = 30$$
$$\sqrt[3]{\frac{P}{R}} = 0{,}3760...$$
$$\frac{P}{R} = 0{,}3760...^3 = 0{,}0531...$$
$$P = 0{,}0531... \cdot R$$
$$P \approx 0{,}053R$$
Dus $P = 0{,}053R$.

Bladzijde 164

14 **a** Bewering 1: TE en LE zijn beide nooit negatief, dus $LE + TE$ is nooit negatief en dus is $B = \frac{LE}{LE + TE}$ nooit negatief.
Bewering 2: Er geldt dat $LE + TE \geq TE$, dus $B = \frac{LE}{LE + TE}$ is kleiner dan 1.
Bewering 3: Bij een kleiner toevalseffect is TE kleiner, dus $LE + TE$ is kleiner en dus is $B = \frac{LE}{LE + TE}$ groter.

b
$$B = \frac{LE}{LE + TE} = \frac{LE + TE - TE}{LE + TE}$$
$$B = \frac{LE + TE}{LE + TE} - \frac{TE}{LE + TE}$$
$$B = 1 - \frac{TE}{LE + TE}$$

c Bij een groter leereffect is LE groter, dus $LE + TE$ is groter en dus is $\frac{TE}{LE + TE}$ kleiner.
Dus is $B = 1 - \frac{TE}{LE + TE}$ groter.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 165

15 **a** $v = 160$ geeft $11{,}3\sqrt{d} = 160$
$\sqrt{d} = 14{,}159...$
$d \approx 200$
$v = 80$ geeft $11{,}3\sqrt{d} = 80$
$\sqrt{d} = 7{,}079...$
$d \approx 50$
De ontbrekende waarden zijn 200 meter en 50 meter.

b $d = 3000$ geeft $v = 11{,}3\sqrt{3000} \approx 619$ km/uur.
De afstand wordt afgelegd in $\frac{150}{619} = 0{,}242...$ uur $\approx 14{,}5$ minuten.

c $h = \left(\frac{1000}{d}\right)^{0,25} \cdot 0{,}6$

$h = \left(1000 \cdot \frac{1}{d}\right)^{0,25} \cdot 0{,}6$

$h = 1000^{0,25} \cdot \left(\frac{1}{d}\right)^{0,25} \cdot 0{,}6$

$h = 5{,}623... \cdot 0{,}6 \cdot (d^{-1})^{0,25}$

$h \approx 3{,}37 \cdot d^{-0,25}$

Bladzijde 166

16 **a** Het kunstwerk heeft 25 rijen en 25 kolommen, dus er zijn $25^2 = 625$ termen.
$som = 0{,}5 \cdot 625 \cdot (0 + 624) = 195\,000$
Het magische getal is $\frac{195\,000}{25} = 7800$.

b er zijn p^2 termen, dus $som = 0{,}5 \cdot p^2 \cdot (0 + p^2 - 1) = 0{,}5 \cdot p^2 \cdot (p^2 - 1)$.
Er zijn p rijen, dus het magische getal is $\frac{0{,}5 \cdot p^2 \cdot (p^2 - 1)}{p} = 0{,}5 \cdot p \cdot (p^2 - 1)$.

c Voer in $y_1 = 0{,}5x(x^2 - 1)$ en aflezen in de tabel geeft
$x = 10$ en $y = 495$
$x = 11$ en $y = 660$
$x = 12$ en $y = 858$
$x = 13$ en $y = 1092$.
Dus p moet dan 11 of 12 zijn.

Bladzijde 167

17 **a** $S_{\text{Dubois (2)}} = 0{,}007184 \cdot (2L)^{0,725} \cdot (8M)^{0,425}$
$= 0{,}007184 \cdot 2^{0,725} \cdot L^{0,275} \cdot 8^{0,425} \cdot M^{0,425}$
Er geldt $2^{0,725} \cdot 8^{0,425} = 2^{0,725} \cdot (2^3)^{0,425} = 2^{0,725} \cdot 2^{1,275} = 2^2 = 4$.
Dit geeft $S_{\text{Dubois (2)}} = 4 \cdot 0{,}007184 \cdot L^{0,275} \cdot M^{0,425}$.
Dus $S_{\text{Dubois (2)}} = 4 \cdot S_{\text{Dubois (1)}}$.

b $S_{\text{Mosteller}} = \sqrt{\frac{1}{3600} \cdot L \cdot M} = \sqrt{\frac{1}{3600}} \cdot \sqrt{L} \cdot \sqrt{M} = \frac{1}{60} \cdot L^{0,5} \cdot M^{0,5}$

18 $s = 0$ en $V = 185$ geeft $p \cdot (0 - 8)(0 - 34) + 150 = 185$
$p \cdot 272 = 35$
$p \approx 0{,}129$
$V = 0{,}129 \cdot (s - 8)(s - 34) + 150$
$V = 0{,}129(s^2 - 42s + 272) + 150$
$V = 0{,}13s^2 - 5{,}42s + 185{,}09$

Bladzijde 168

19 **a** Aflezen in de figuur geeft in 1930 is $\sqrt{opp} \approx 2200$ en in 1960 is $\sqrt{opp} \approx 4500$.
In 1930 is $r = \frac{2200}{\sqrt{\pi}} \approx 1241$ km en in 1960 is $r = \frac{4500}{\sqrt{\pi}} \approx 2539$ km.
De gemiddelde toename per jaar is $\frac{2539 - 1241}{30} \approx 43$ km per jaar.

15

b In de oude situatie geldt $s = \frac{290}{1,81}\sqrt{\log(1,33)} \approx 56,4$.

In de nieuwe situatie geldt $s = \frac{290}{1,81}\sqrt{\log(1,33 \cdot 0,9)} = \frac{290}{1,81}\sqrt{\log(1,197)} \approx 44,8$.

De procentuele verandering is $\frac{44,8 - 56,4}{56,4} \times 100\% \approx -20,6\%$, dus een afname van 20,6%.

c Situatie 1: als m toeneemt, neemt $\frac{290}{m}$ af en omdat V niet verandert neemt $s = \frac{290}{m}\sqrt{\log(V)}$ dus af.

De toename van de straal wordt dus kleiner.

Situatie 2: omdat m niet verandert blijft $\frac{290}{m}$ gelijk. V neemt toe, dus $\sqrt{\log(V)}$ neemt ook toe.

Dus $s = \frac{290}{m}\sqrt{\log(V)}$ neemt toe. De toename van de straal wordt dus groter.

15

Bladzijde 169

20 **a** Voor $x = 51$ geldt $L = \frac{2 \cdot (51 - 25)}{25} = 2,08$, $D = 51 - 40 = 11$ en $H = 2$. Dus $Z = \frac{2,08 \cdot 11 \cdot 5}{2} = 57,2$.

Voor $x = 52$ geldt $L = \frac{2 \cdot (52 - 25)}{25} = 2,16$, $D = 52 - 40 = 12$ en $H = 2$. Dus $Z = \frac{2,16 \cdot 12 \cdot 5}{2} = 64,8$,

maar Z is maximaal 60, dus bij $x = 52$ hoort $Z = 60$.

b Er geldt dan $L = \frac{2 \cdot (x - 25)}{25} = \frac{2x - 50}{25} = 0,08x - 2$ en $D = x - 40$.

$$Z = \frac{(0,08x - 2) \cdot (x - 40) \cdot 5}{4} = \frac{(0,08x^2 - 5,2x + 80) \cdot 5}{4} = 0,1x^2 - 6,5x + 100$$

Dus $a = 0,1$, $b = -6,5$ en $c = 100$.

21 $G = 0,003 \cdot L^{3,206}$

$L^{3,206} = 333,33...G$

$L = (333,33...G)^{\frac{1}{3,206}}$

$L = 333,33...^{\frac{1}{3,206}} \cdot G^{\frac{1}{3,206}}$

$L \approx 6,1 \cdot G^{0,3}$

Dus $L = 6,1 \cdot G^{0,3}$.

Bladzijde 170

22 **a** Aflezen bij $B = 80$ geeft $K_{chip} = 0,0025$ en $K_{cont} = 0,006$.

De kosten per transactie zijn dus $80 \cdot 0,0025 = 0,20$ euro en $80 \cdot 0,006 = 0,48$ euro.

Het verschil is 0,28 euro.

b Er geldt $TK_{cont} = K_{cont} \cdot B$, dus $TK_{cont} = \left(0,00488 + \frac{0,0744}{B}\right) \cdot B = 0,00488B + 0,0744$.

Dus $a = 0,00488$ en $b = 0,0744$.

Bladzijde 171

c Los op $0,00488 + \frac{0,0744}{B} = 0,00093 + \frac{0,193}{B}$.

Voer in $y_1 = 0,00488 + \frac{0,0744}{x}$ en $y_2 = 0,00093 + \frac{0,193}{B}$.

Intersect geeft $x \approx 30,025$, dus bij bedragen vanaf 30,03 euro zijn de transactiekosten voor het pinnen lager dan voor contant betalen.

d De grenswaarde van K_{cont} is 0,00488. Omdat de grafiek van K_{chip} voor grote bedragen onder de grafiek van K_{cont} ligt, is p dus kleiner dan 0,00488.

Ongeveer bij $B = 5$ snijden de grafieken van K_{cont} en K_{chip} elkaar.

Er geldt dan $0,00488 + \frac{0,0744}{B} = p + \frac{q}{B}$. Omdat p kleiner is dan 0,00488 moet q wel groter zijn dan 0,0744.

23 **a** De heenweg duurt dan $\frac{10}{25} = 0,4$ uur = 24 minuten en de terugweg $\frac{10}{15} = 0,66...$ uur = 40 minuten.

In totaal is haar reistijd 64 minuten, dus 4 minuten meer dan een uur.

© Noordhoff Uitgevers bv

b De heenweg duurt $\frac{10}{20+w}$ uur en de terugweg duurt $\frac{10}{20-w}$ uur.
De totale reistijd is dus
$$T = \frac{10}{20+w} + \frac{10}{20-w} = \frac{10(20-w)}{(20+w)(20-w)} + \frac{10(20+w)}{(20+w)(20-w)} = \frac{200-10w+200+10w}{400-w^2} = \frac{400}{400-w^2}.$$
Dus $T = \frac{400}{400-w^2}$.

c 1 uur en 20 minuten is $1\frac{1}{3}$ uur.
Los op $\frac{400}{400-w^2} = 1\frac{1}{3}$
$400 - w^2 = 300$
$w^2 = 100$
$w = 10$

d $w = 0$ geeft $T = 1$
Als w groter wordt dan 0, dan neemt $400 - w^2$ af. Dus dan neemt $\frac{400}{400-w^2}$ toe.
De totale reistijd wordt dus langer wanneer er wind is.

15

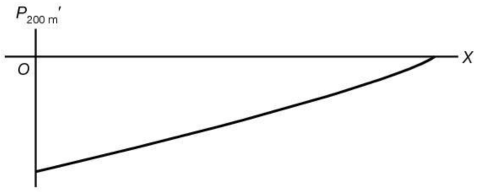
15.3 Differentiaalrekening

Bladzijde 177

24 **a** Los op $9{,}23076 \cdot (26{,}7 - X)^{1{,}835} = 1172$
$(26{,}7 - X)^{1{,}835} = 126{,}966...$
$26{,}7 - X = 126{,}966...^{\frac{1}{1{,}835}} = 14{,}009...$
$X \approx 12{,}69$
De tijd is 12,69 seconden.

b De bovengrens bij de 100 meter horden wordt behaald als $X = 0$ seconden.
Dat geeft een bovengrens van $9{,}23076 \cdot (26{,}7 - 0)^{1{,}835} \approx 3827$ punten.
Voor het verspringen geldt de formule $P_{\text{verspringen}} = 0{,}188807 \cdot (X - 210)^{1{,}41}$.
Los op $0{,}188807 \cdot (X - 210)^{1{,}41} = 3827$
$(X - 210)^{1{,}41} = 20269{,}375...$
$X - 210 = 20269{,}375...^{\frac{1}{1{,}41}} = 1133{,}696...$
$X \approx 1344$
Een atlete moet dan dus 13,44 m verspingen.

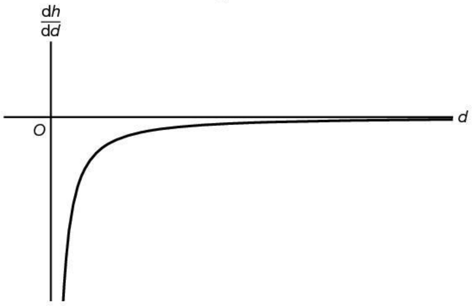
c $P_{200\text{ m}} = 4{,}99087 \cdot (42{,}5 - X)^{1{,}81}$ geeft
$P_{200\text{ m}}' = 4{,}99087 \cdot 1{,}81 \cdot (42{,}5 - X)^{0{,}81} \cdot -1 = -9{,}0334747(42{,}5 - X)^{0{,}81}$



De grafiek van $P_{200\text{ m}}'$ ligt onder de X-as, dus de grafiek van $P_{200\text{ m}}$ is dalend.
De grafiek van $P_{200\text{ m}}'$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van $P_{200\text{ m}}$ is afnemend dalend.

Bladzijde 178

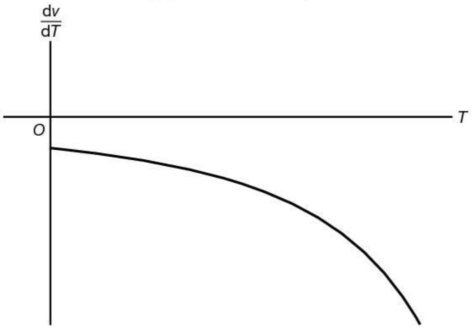
25 $h = 3{,}37 \cdot d^{-0{,}25}$ geeft $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}d} = -0{,}25 \cdot 3{,}37 \cdot d^{-1{,}25} = -0{,}8425d^{-1{,}25}$



Als d dichter bij nul komt krijgt $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}d}$ een grotere negatieve waarde. De toename van de golfhoogte wordt dan dus groter.

26 **a** $v = 0{,}197 + \dfrac{T - 20}{8{,}16T - 17360}$ geeft

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}T} = \frac{(8{,}16T - 17360) \cdot 1 - (T - 20) \cdot 8{,}16}{(8{,}16T - 17360)^2} = \frac{8{,}16T - 17360 - 8{,}16T - 162{,}2}{(8{,}16T - 17360)^2} = \frac{-17196{,}8}{(8{,}16T - 17360)^2}$$



De grafiek van $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}T}$ ligt geheel onder de T-as, dus de grafiek van v is dalend.

De grafiek van $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}T}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van v is toenemend dalend.

De maximale opwarmsnelheid daalt dus steeds sterker bij toenemende oventemperatuur.

b Bij de maximale temperatuur is $v = 0$.

Los op $0{,}197 + \dfrac{T - 20}{8{,}16T - 17360} = 0$.

Voer in $y_1 = 0{,}197 + \dfrac{x - 20}{8{,}16x - 17360}$.

De optie zero of ROOT geeft $x \approx 1319{,}2$.

De maximale temperatuur is dus 1319 °C.

Bladzijde 179

c Aflezen uit de figuur geeft de punten (9,7; 600) en (14,7; 1100). De stijging van de temperatuur is dus $\dfrac{1100 - 600}{14{,}7 - 9{,}7} = 100$ °C/uur.

$T = 1100$ geeft $v \approx 0{,}07$ °C/seconde, ofwel 252 °C/uur.

De maximale opwarmsnelheid neemt af als de temperatuur toeneemt, dus bij temperaturen lager dan 1100 °C is de maximale opwarmsnelheid van de oven groter.

De stijging van 100 °C/uur is dus inderdaad kleiner dan de maximale opwarmsnelheid van de oven.

 © Noordhoff Uitgevers bv

27 $S = 0{,}303787 \cdot M^{0{,}425}$ geeft $\dfrac{dS}{dM} = 0{,}425 \cdot 0{,}303787 \cdot M^{-0{,}575} = 0{,}129109475M^{-0{,}575}$

$M = 66$ geeft $\dfrac{dS}{dM} = 0{,}129109475 \cdot 66^{-0{,}575} \approx 0{,}0116$

Bij een vrouw met een gewicht van 66 kg en een lengte van 1,75 m neemt de lichaamsoppervlakte toe met 0,0116 m^2 per kg gewichtstoename.

28 $T = \dfrac{400}{400 - w^2}$ geeft $\dfrac{dT}{dw} = \dfrac{(400 - w^2) \cdot 0 - 400 \cdot -2w}{(400 - w^2)^2} = \dfrac{800w}{(400 - w^2)^2}$

De teller $800w$ is positief en de noemer $(400 - w^2)^2$ is ook positief, dus $\dfrac{dT}{dw} = \dfrac{800w}{(400 - w^2)^2}$ is positief.

Omdat $\dfrac{dT}{dw} > 0$ is de grafiek van T stijgend, dus de reistijd neemt toe als de windsnelheid toeneemt.

Bladzijde 180

29 **a** oppervlakte grondvlak $= 2{,}5^2 = 6{,}25$ dm^2
hoogte $= 9 - 1 \cdot 2{,}5 = 6{,}5$ dm
De inhoud is $\frac{1}{3} \cdot 6{,}25 \cdot 6{,}5 \approx 13{,}5$ dm^3.

b $I = \frac{1}{3}x^2(9 - x) = 3x^2 - \frac{1}{3}x^3$ geeft $\dfrac{dI}{dx} = 6x - x^2$

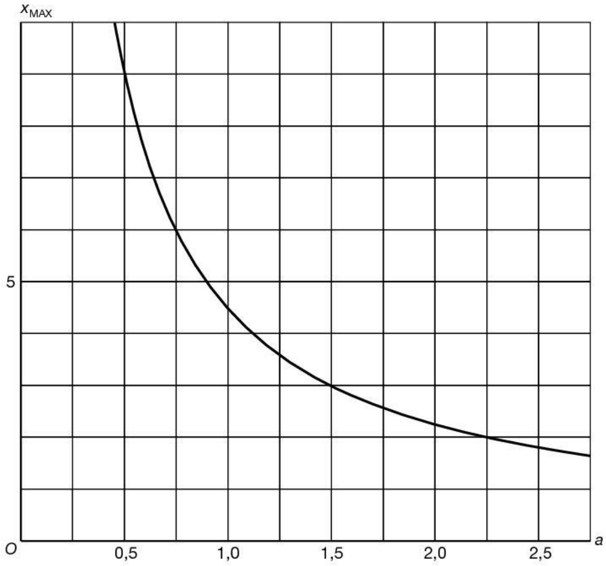
$\dfrac{dI}{dx} = 0$ geeft $6x - x^2 = 0$
$x(6 - x) = 0$
$x = 0 \vee x = 6$
Dus de inhoud is maximaal voor $x = 6$.

Bladzijde 181

c oppervlakte grondvlak $= 2 \cdot x = 2x$
hoogte $= 9 - ax$
Dus $I = \frac{1}{3} \cdot 2x \cdot (9 - ax) = 6x - \frac{2}{3}ax^2$.

d $I = 6x - \frac{2}{3}ax^2$ geeft $\dfrac{dI}{dx} = 6 - \frac{4}{3}ax$

$\dfrac{dI}{dx} = 0$ geeft $6 - \frac{4}{3}ax = 0$
$\frac{4}{3}ax = 6$
$ax = 4{,}5$
$x_{MAX} = \dfrac{4{,}5}{a}$



30 **a** Los op $0{,}19s^2 - 8{,}71s + 169{,}72 = 120$.
Voer in $y_1 = 0{,}19x^2 - 8{,}71x + 169{,}72$ en $y_2 = 120$.
Intersect geeft $x \approx 6{,}7$ en $x \approx 39{,}2$.
De snelheden zijn dus 7 en 39 km/uur.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $V = 0{,}19s^2 - 8{,}71s + 169{,}72$ geeft $\frac{dV}{ds} = 0{,}38s - 8{,}71$

$\frac{dV}{ds} = 0$ geeft $0{,}38s - 8{,}71 = 0$

$0{,}38s = 8{,}71$

$s \approx 22{,}9$

Dus bij een snelheid van 23 km/uur is het vermogen minimaal.

Bladzijde 182

31 **a** $a = 5$, $u = 4$ en $P = 0{,}5$ geeft $13{,}33 \cdot \frac{5}{G} - 0{,}15 \cdot 4 = 0{,}5$

$\frac{66{,}65}{G} = 1{,}1$

$G = \frac{66{,}65}{1{,}1} \approx 60{,}6$

De vrouw weegt minstens 61 kg.

b In de oude situatie geldt $13{,}33 \cdot \frac{a}{70} - 0{,}15 \cdot 0 = 0{,}5$

$\frac{13{,}33a}{70} = 0{,}5$

$13{,}33a = 35$

$a = \frac{35}{13{,}33} \approx 2{,}6$

In de nieuwe situatie geldt $13{,}33 \cdot \frac{a}{70} - 0{,}15 \cdot 0 = 0{,}2$

$\frac{13{,}33a}{70} = 0{,}2$

$13{,}33a = 14$

$a = \frac{14}{13{,}33} \approx 1{,}1$

Het verschil is dus 1,5 glas.

c Met de formule: Als a en u gelijk blijven en G neemt toe, dan neemt $13{,}33 \cdot \frac{a}{G}$ af en dan neemt $P = 13{,}33 \cdot \frac{a}{G} - 0{,}15u$ ook af. Dus bij toenemend gewicht daalt het promillage.

Met de afgeleide: $P = 13{,}33 \cdot \frac{a}{G} - 0{,}15u = 13{,}33aG^{-1} - 0{,}15u$ geeft $\frac{dP}{dG} = -13{,}33aG^{-2} = \frac{-13{,}33a}{G^2}$

De teller van $\frac{dP}{dG}$ is negatief en de noemer is positief, dus $\frac{dP}{dG}$ is negatief voor elke waarde van G.

Dus P neemt af als G toeneemt. Dus bij toenemend gewicht daalt het promillage.

d $P = 13{,}33 \cdot \frac{a}{G} - 0{,}15u$

$0{,}15u = \frac{13{,}33a}{G} - P$

$0{,}15u = \frac{13{,}33a}{G} - \frac{PG}{G} = \frac{13{,}33a - PG}{G}$

$u \approx \frac{6{,}67(13{,}33a - PG)}{G}$

Dus $u = \frac{6{,}67(13{,}33a - PG)}{G}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

15.4 Formules met exponenten en logaritmen

Bladzijde 189

32 $\frac{2,14}{1,50} \approx 1,427$; $\frac{3,06}{2,14} \approx 1,430$; $\frac{4,37}{3,06} \approx 1,428$; $\left(\frac{8,90}{4,37}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1,427$; $\left(\frac{18,15}{8,90}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1,428$; $\left(\frac{37,07}{18,15}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1,429$

De uitkomsten verschillen weinig, dus er is sprake van een exponentieel verband.

De groeifactor per 1000 punten is $\left(\frac{37,01}{1,50}\right)^{\frac{1}{9}} \approx 1,428$.

Bladzijde 190

33 **a** Aflezen uit de figuur geeft: bij 4 jaar horen 3000 woorden, bij 8 jaar horen 6000 woorden en bij 12 jaar horen 17 000 woorden.

Van 4 tot 8 jaar is de toename gemiddeld $\frac{6000 - 3000}{4} = 750$ woorden per jaar en van 8 tot 12 jaar is de toename gemiddeld $\frac{17000 - 6000}{4} = 2750$ woorden per jaar.

Dus 2000 woorden per jaar meer.

b $g = \left(\frac{150000}{17000}\right)^{\frac{1}{9}} \approx 1,274$

c $W_l = at + b$ met $a = \frac{45000 - 17000}{21 - 12} \approx 3111$ en $b = 17000$ geeft $W_l = 3111t + 17000$.

$t = 6$ geeft $W_l = 3111 \cdot 6 + 17000 = 35666$.

Los op $17000 \cdot 1,27^t = 35666$.

Voer in $y_1 = 17000 \cdot 1,27^x$ en $y_2 = 35666$.

Intersect geeft $x \approx 3,1$, dus 3,1 jaar.

Het verschil is $6 - 3,1 = 2,9$ jaar, dus ongeveer 35 maanden.

Bladzijde 191

d Substitutie van $t = L - 12$ in de formule van W_h geeft

$W_h = 17000 \cdot 1,27^{L-12} = 17000 \cdot 1,27^{-12} \cdot 1,27^L \approx 970 \cdot 1,27^L$.

Dus $W_h = 970 \cdot 1,27^L$.

34 **a** $F = b \cdot g^t$ met $g = \left(\frac{1065}{140}\right)^{\frac{1}{3}} = 1,9667...$

$$\left.\begin{array}{l} F = b \cdot 1,9667...^t \\ t = 2 \text{ en } F = 140 \end{array}\right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,9667...^2 = 140 \\ b = \frac{140}{1,9667...^2} \\ b \approx 36 \end{array}$$

Dus $F = 36 \cdot 1,967^t$.

b $F(0) = \frac{340}{1 + 54e^{-0,24 \cdot 0}} \approx 6,2$

Als t heel groot is, dan is $e^{-0,24t} \approx 0$, dus dan is $1 + 54e^{-0,24t} \approx 1 + 54 \cdot 0 = 1$ en dan is dus $F \approx \frac{340}{1} = 340$.

Het aantal fruitvliegjes is dus minstens 6 en hoogstens 340.

c $F = \frac{340}{1 + 54e^{-0,24t}}$ geeft $F'(t) = \frac{(1 + 54e^{-0,24t}) \cdot 0 - 340 \cdot 54e^{-0,24t} \cdot -0,24}{(1 + 54e^{-0,24t})^2} = \frac{4406,4e^{-0,24t}}{(1 + 54e^{-0,24t})^2}$

Voer in $y_1 = \frac{4406,4e^{-0,24x}}{(1 + 54e^{-0,24x})^2}$.

De optie maximum geeft $x \approx 16,6$ en $y \approx 20,4$.

Bij $t = 16,6$ hoort 26 november 2011.

Dus op 26 november 2011 komen er de meeste fruitvliegjes bij.

Bladzijde 192

35 **a** $C_1(t) = \frac{16t}{190t^2 + 60}$ geeft $C_1'(t) = \frac{(190t^2 + 60) \cdot 16 - 16t \cdot 380t}{(190t^2 + 60)^2} = \frac{3040t^2 + 960 - 6080t^2}{(190t^2 + 60)^2} = \frac{960 - 3040t^2}{(190t^2 + 60)^2}$

$C_1'(t) = 0$ geeft $960 - 3040t^2 = 0$

$3040t^2 = 960$

$t^2 = 0,315...$

$t = 0,561...$

Dus na ongeveer 34 minuten is de concentratie maximaal.

15

b Bij de formule van C_1 worden zowel de teller en de noemer heel groot als t heel groot is. De kwadratische noemer wordt echter sneller groot dan de lineaire teller. C_1 wordt dus ongeveer 0 als de t heel groot wordt.
Als t heel groot is, dan is $e^{-0,65t} \approx 0$ en ook $e^{-3,9t} \approx 0$ en dus is $C_2 \approx 0,13 \cdot (0 - 0) = 0$.
Voor beide formules geldt dus dat na verloop van tijd de werkzame stof uit het bloed verdwijnt.

c $C_2(t) = 0,13(e^{-0,65t} - e^{-3,9t})$ geeft
$C_2'(t) = 0,13(e^{-0,65t} \cdot -0,65 - e^{-3,9t} \cdot -3,9) = 0,13(-0,65\,e^{-0,65t} + 3,9\,e^{-3,9t})$
Los op $0,13(-0,65\,e^{-0,65t} + 3,9\,e^{-3,9t}) = 0$.
Voer in $y_1 = 0,13(-0,65\,e^{-0,65x} + 3,9\,e^{-3,9x})$.
De optie zero of ROOT geeft $x \approx 0,55$, dus C_2 is maximaal op $t = 0,55$.
Het maximum van C_2 wordt dus eerder bereikt dan het maximum van C_1.

Bladzijde 193

15

36 **a** Aflezen in de figuur bij een Alexa Ranking tussen 1000 en 2000 geeft een hoogste punt van 180 000 en een laagste punt van 28 000.
Het verschil is dus 180 000 − 28 000 = 152 000 bezoekers.

b Los op $1\,118\,000 \cdot r^{-0,35} = 25\,000$.
Voer in $y_1 = 1\,118\,000 \cdot x^{-0,35}$ en $y_2 = 25\,000$.
Intersect geeft $x \approx 51\,966$, dus de Alexa Ranking is ongeveer 52 000.

c $B = 1\,118\,000 \cdot r^{-0,35} = \dfrac{1\,118\,000}{r^{0,35}}$

Als r toeneemt, dan neemt $r^{0,35}$ toe en dan neemt $\dfrac{1\,118\,000}{r^{0,35}}$ af.

De grafiek van B is dus dalend.

d $\log(B) = \log(1\,118\,000 \cdot r^{-0,35})$
$\log(B) = \log(1\,118\,000) + \log(r^{-0,35})$
$\log(B) \approx 6,05 - 0,35\log(r)$
Dus $a \approx 6,05$ en $b = -0,35$.

Bladzijde 194

37 **a** $H = ax + b$ met $a = \dfrac{145 - 55}{400 - 10} = 0,230...$

$\left.\begin{array}{l} H = 0,230...x + b \\ \text{door } (10, 55) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0,230... \cdot 10 + b = 55 \\ b \approx 52,7 \end{array}$

Dus $H = 0,231x + 52,7$
Los op $-45,88 + 28,85 \cdot \ln(x) = 0,231x + 52,7$.
Voer in $y_1 = -45,88 + 28,85 \cdot \ln(x)$ en $y_2 = 0,231x + 52,7$.
Intersect geeft $x \approx 43$ en $x \approx 275$.
De Hammingafstanden zijn volgens beide formules gelijk voor 43 km en 275 km.

Bladzijde 195

b $H(2x) = -45,88 + 28,85 \cdot \ln(2x)$
$= -45,88 + 28,85(\ln(x) + \ln(2))$
$= -45,88 + 28,85 \cdot \ln(x) + 28,85 \cdot \ln(2)$
$= -45,88 + 28,85 \cdot \ln(x) + 19,997...$
Dus $H(2x) \approx H(x) + 20$.

38 **a** $\dfrac{pop(A)}{pop(B)} = 1$ en $\dfrac{bbp(A)}{bbp(B)} = 1$

$\text{GD(Italië, Engeland)} = 0,316 \cdot \log(1) + 0,334 \cdot \log(1) + 1,702 \cdot \log\left(\dfrac{16}{12}\right) \approx 0,21$

Italië maakt dus volgens de formule naar verwachting 0,21 doelpunten meer.

b Er moet gelden

$\log\left(\dfrac{pop(A)}{pop(B)}\right) = -\log\left(\dfrac{pop(B)}{pop(A)}\right)$, $\log\left(\dfrac{bbp(A)}{bbp(B)}\right) = -\log\left(\dfrac{bbp(B)}{bbp(A)}\right)$ en $\log\left(\dfrac{erv(A)}{erv(B)}\right) = -\log\left(\dfrac{erv(B)}{erv(A)}\right)$.

$\log\left(\dfrac{pop(A)}{pop(B)}\right) = \log(pop(A)) - \log(pop(B)) = -(\log(pop(B)) - \log(pop(A))) = -\log\left(\dfrac{pop(B)}{pop(\text{A})}\right)$

Voor de andere twee formules is een soortgelijke redenering te voeren.
Er geldt dus dat $\text{GD}(A, B) = -\text{GD}(B, A)$

© Noordhoff Uitgevers bv

c Stel $x = \dfrac{bbp(\text{Nederland})}{bbp(\text{Brazilië})}$.

Los op $0{,}316 \cdot \log\left(\dfrac{16{,}6}{185{,}7}\right) + 0{,}334 \cdot \log(x) + 1{,}702 \cdot \log\left(\dfrac{8}{18}\right) = -0{,}67$.

Voer in $y_1 = 0{,}316 \cdot \log\left(\dfrac{16{,}6}{185{,}7}\right) + 0{,}334 \cdot \log(x) + 1{,}702 \cdot \log\left(\dfrac{8}{18}\right)$ en $y_2 = -0{,}67$.

Intersect geeft $x \approx 6$, dus het *bbp* van Nederland is ongeveer 6 keer zo groot als dat van Brazilië.

Bladzijde 196

39 **a** $g_{\text{jaar}} = \left(\dfrac{6}{12{,}5}\right)^{\frac{1}{6000}} \approx 0{,}9998777$

b Los op $12{,}5 \cdot 0{,}999878^t = 9{,}5$.
Voer in $y_1 = 12{,}5 \cdot 0{,}999878^x$ en $y_2 = 9{,}5$.
Intersect geeft $x \approx 2249$, dus ongeveer 2249 jaar oud.
$1949 - 2249 = -300$, dus het verschil is 100 jaar.

c $e^{at} = 0{,}999878^t$
$(e^a)^t = 0{,}999878^t$
$e^a = 0{,}999878$
$a = \ln(0{,}999878) \approx -0{,}000122$
Dus $a = -0{,}000122$.

Bladzijde 197

40 **a** Aflezen in de figuur geeft dat bij $t = 0$ hoort $N = 100$ en bij $t = 9$ hoort $N = 14\,000$.
$N = b \cdot g^t$ met $b = 100$ en $g = \left(\dfrac{14\,000}{100}\right)^{\frac{1}{9}} \approx 1{,}73$, dus $N = 100 \cdot 1{,}73^t$.
De formule is dus juist.

b $N(t) = 100 \cdot 1{,}73^t$ geeft $N'(t) = 100 \cdot 1{,}73^t \cdot \ln(1{,}73)$
Los op $100 \cdot 1{,}73^t \cdot \ln(1{,}73) = 1000$.
Voer in $y_1 = 100 \cdot 1{,}73^x \cdot \ln(1{,}73)$ en $y_2 = 1000$.
Intersect geeft $x \approx 5{,}3$.
Dus in het jaar 1958 was de groeisnelheid groter dan 1000 tortels per jaar.

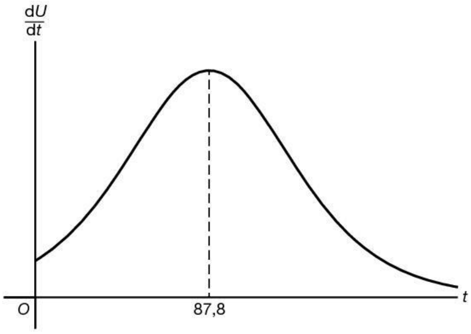
41 **a** Als t heel groot is, dan is $0{,}965^t \approx 0$ en dan is $1 + 22{,}8 \cdot 0{,}965^t \approx 1 + 22{,}8 \cdot 0 = 1$. Dus dan is $U \approx \dfrac{300}{1} = 300$. De grenswaarde is dus 300 miljoen.

b $U = \dfrac{300}{1 + 22{,}8 \cdot 0{,}965^t}$ geeft

$$\frac{dU}{dt} = \frac{(1 + 22{,}8 \cdot 0{,}965^t) \cdot 0 - 300 \cdot (22{,}8 \cdot 0{,}965^t \cdot \ln(0{,}965))}{(1 + 22{,}8 \cdot 0{,}965^t)^2}$$

$$= \frac{-300 \cdot \ln(0{,}965) \cdot 22{,}8 \cdot 0{,}965^t}{(1 + 22{,}8 \cdot 0{,}965^t)^2} \approx \frac{244 \cdot 0{,}965^t}{(1 + 22{,}8 \cdot 0{,}965^t)^2}$$

c Voer in $y_1 = \dfrac{244 \cdot 0{,}965^x}{(1 + 22{,}8 \cdot 0{,}965^x)^2}$.
De optie maximum geeft $x \approx 87{,}8$.
Dus in het jaar 2067 neemt de bevolking het snelst toe.



Bladzijde 198

42 De omgevingstemperatuur is 20 °C, dus $a = 20$.
De begintemperatuur is 630 °C, dus $b = 630$.

$g_{\text{uur}} = \left(\dfrac{70}{630}\right)^{\frac{1}{8}} = 0{,}759...$, dus $e^c = 0{,}759...$, dus $c = \ln(0{,}759...) \approx -0{,}275$.
Dus $a = 20$, $b = 630$ en $c = -0{,}275$.

15

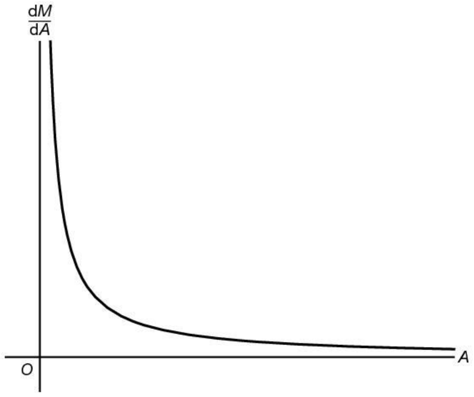
43 **a** $g_{\text{week}} = \left(\frac{1\,120\,987}{1\,038\,340}\right)^{\frac{1}{23}} = 1{,}0033...$
Van 19 april 2012 tot 19 april 2014 is 104 weken, dus het aantal artikelen op 19 april 2014 is
$1\,038\,340 \cdot 1{,}0033...^{104} \approx 1\,468\,000$.
b De beginwaarde voor de gewone artikelen is 2 keer zo groot als die van de computergegenereerde artikelen.
De groeifactor per jaar voor de gewone artikelen is 1,05 en voor de computergegenereerde artikelen 1,17.
Los op $2 \cdot 1{,}05^x = 1{,}17^x$.
Voer in $y_1 = 2 \cdot 1{,}05^x$ en $y_2 = 1{,}17^x$.
Intersect geeft $x = 6{,}405...$, dus na 6 jaar en 5 maanden is het aantal artikelen gelijk.

Bladzijde 199

44 **a** Los op $b \cdot \ln(14) = 8$.
Dat geeft $b = \frac{8}{\ln(14)} \approx 3{,}0$, dus $b = 3{,}0$.
b Er geldt $b_p \cdot \ln(17) = b_v \cdot \ln(5)$
$$b_p = b_v \cdot \frac{\ln(5)}{\ln(17)}$$
$$b_p \approx b_v \cdot 0{,}568$$
De *b*-waarde van Pim is dus niet precies half zo groot als die van zijn vader.
c Voor het menu met 18 knoppen geldt $T = 1{,}4 \cdot \ln(19) \approx 4{,}12$ seconde.
Voor het andere menu geldt dat er twee keer gedrukt moet worden; één keer in een menu met drie knoppen en één keer in een menu met zes knoppen.
Dat duurt dan dus $1{,}4 \cdot \ln(4) + 1{,}4 \cdot \ln(7) \approx 4{,}67$ seconde.
Dat is 0,55 seconde langer, dus het klopt.
d Met één menu geldt $T(p \cdot q) = 1 \cdot \ln(p \cdot q + 1) = \ln(pq + 1)$.
Met submenu's geldt $T(p) + T(q) = 1 \cdot \ln(p + 1) + 1 \cdot \ln(q + 1) = \ln((p + 1)(q + 1)) = \ln(pq + p + q + 1)$.
$pq + p + q + 1 > pq + 1$, dus één menu is altijd sneller dan een menu met submenu's.

Bladzijde 200

45 **a** $g_{\text{dag}} = 0{,}5^{\frac{1}{8}} \approx 0{,}917$
Op 6 april 2011 was de hoeveelheid radioactief jodium $5 \cdot 4800 = 24\,000$ becquerel/liter.
Los op $24\,000 \cdot 0{,}917^t = 5$.
Voer in $y_1 = 24\,000 \cdot 0{,}917^x$ en $y_2 = 5$.
Intersect geeft $x \approx 97{,}8$. Dus na ongeveer 98 dagen mocht er weer gevist worden.
b $\log(10A) + 3 = \log(A) + \log(10) + 3 = \log(A) + 1 + 3 = \log(A) + 4$.
Dus $\log(10A) + 3$ is 1 meer dan $\log(A) + 3$.
c $M = \log(A) + 3$ geeft $\frac{dM}{dA} = \frac{1}{A \cdot \ln(10)}$



De grafiek van $\frac{dM}{dA}$ ligt boven de *A*-as, dus de grafiek van *M* is stijgend.
De grafiek van $\frac{dM}{dA}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van *M* is afnemend stijgend.
De toename van *M* wordt dus steeds kleiner.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 201

d $\log(A) + 3 = 0{,}67 \cdot \log(E) - 0{,}9$
$0{,}67 \log(E) = \log(A) + 3{,}9$
$\log(E) = 1{,}492... \cdot \log(A) + 5{,}820...$
$E = 10^{1{,}492... \cdot \log(A) + 5{,}820...}$
$E \approx 10^{1{,}49 \cdot \log(A) + 5{,}82}$
Dus $p = 1{,}49$ en $q = 5{,}82$.

46 **a** Als t heel groot is, dan is $t + 0{,}357$ heel groot en dan is $-0{,}188(t + 0{,}357)$ een erg negatief getal. Dan is $e^{-0{,}188(t+0{,}357)} \approx 0$ en dus is $L \approx 87{,}0 - 87{,}0 \cdot 0 = 87{,}0$.
De grenswaarde is dus 87,0 cm.

b $L = 87{,}0 - 87{,}0 \cdot e^{-0{,}188(t+0{,}357)}$ geeft $\frac{dL}{dt} = -87{,}0 \cdot e^{-0{,}188(t+0{,}357)} \cdot -0{,}188 = 16{,}356\, e^{-0{,}188(t+0{,}357)}$
$t = 2$ geeft $\frac{dL}{dt} = 16{,}356\, e^{-0{,}188(2+0{,}357)} \approx 10{,}5$
De lengte van een mannetjessnoek van 2 jaar oud neemt met ongeveer 10,5 cm per jaar toe.

c Omdat $L_{max} = 130$ geldt $L = 130 - 130 \cdot e^{-0{,}188(t+c)}$.
Invullen van $t = 0$ en $L = 5{,}6$ geeft $130 - 130 \cdot e^{-0{,}188(0+c)} = 5{,}6$.
Voer in $y_1 = 130 - 130 \cdot e^{-0{,}188x}$ en $y_2 = 5{,}6$.
Intersect geeft $x \approx 0{,}234$.
Dus $L = 130 - 130 \cdot e^{-0{,}188(t+0{,}234)}$.

Bladzijde 202

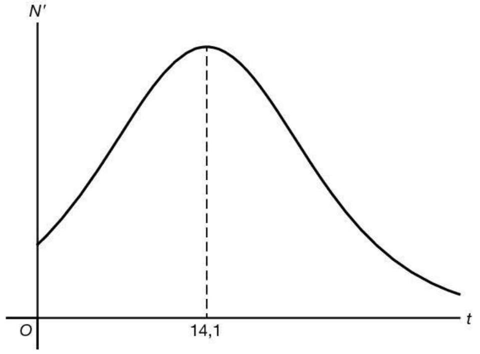
47 **a** $N = b \cdot g^t$ met $b = 200$ en $g = \left(\frac{2100}{200}\right)^{\frac{1}{20}} = 1{,}1247...$
Dus $N = 200 \cdot 1{,}125^t$.
$t = 30$ geeft $N = 200 \cdot 1{,}125^{30} \approx 6800$
In 2010 waren er dus ongeveer 6800 lepelaars op de Waddeneilanden.

b $N = \frac{2780}{1 + 12{,}9 \cdot 0{,}834^t}$ geeft

$$N'(t) = \frac{(1 + 12{,}9 \cdot 0{,}834^t) \cdot 0 - 2780 \cdot 12{,}9 \cdot 0{,}834^t \cdot \ln(0{,}834)}{(1 + 12{,}9 \cdot 0{,}834^t)^2}$$

$$= \frac{-2780 \cdot 12{,}9 \cdot \ln(0{,}834) \cdot 0{,}834^t}{(1 + 12{,}9 \cdot 0{,}834^t)^2} \approx \frac{6510 \cdot 0{,}834^t}{(1 + 12{,}9 \cdot 0{,}834^t)^2}$$

Voer in $y_1 = \frac{6510 \cdot 0{,}834^x}{(1 + 12{,}9 \cdot 0{,}834^x)^2}$.
De optie maximum geeft $x \approx 14{,}1$.
De grafiek gaat over van toenemend stijgend naar afnemend stijgend op $t \approx 14{,}1$, dus in 1994.



c Als t heel groot is, dan is $0{,}834^t \approx 0$ en dan is $1 + 12{,}9 \cdot 034^t \approx 1$.
Dus dan is $N \approx \frac{2780}{1} = 2780$.
De grenswaarde is dus 2780.
$0{,}95 \cdot 2780 = 2641$
Los op $\frac{2780}{1 + 12{,}9 \cdot 0{,}834^t} = 2641$.
Voer in $y_1 = \frac{2780}{1 + 12{,}9 \cdot 0{,}834^x}$ en $y_2 = 2641$.
Intersect geeft $x \approx 30{,}3$, dus in 2010 verschilde het aantal lepelaars voor het eerst minder dan 5% van de grenswaarde.

15.5 Rijen en sinusoïden

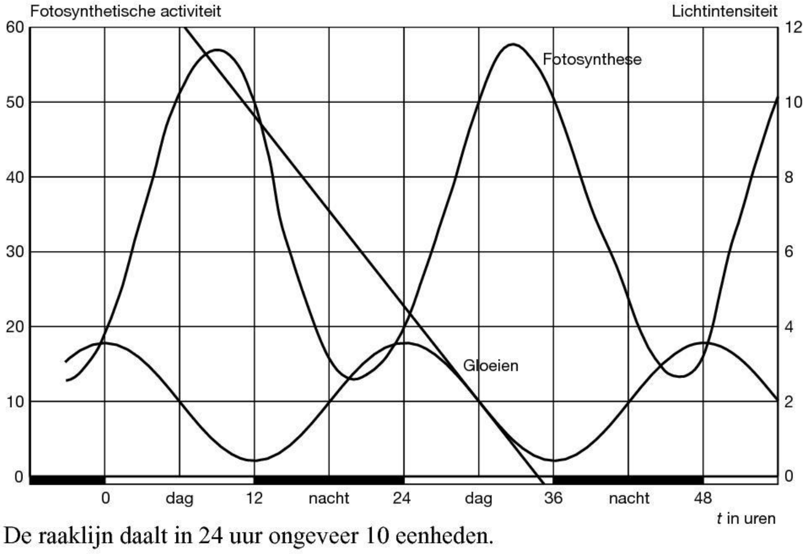
Bladzijde 207

48 **a** $a = \text{evenwichtsstand} = \frac{57 + 13}{2} = 35$
$b = \text{amplitude} = 57 - 35 = 22$
periode = 24, dus $c = \frac{2\pi}{24} = \frac{1}{12}\pi$
Dus de formule is $F = 35 + 22\sin\left(\frac{1}{12}\pi(t - 3)\right)$.

b Los op $2{,}0 + 1{,}6\sin\left(\frac{1}{12}\pi(t - 18)\right) = 3$.

Voer in $y_1 = 2{,}0 + 1{,}6\sin\left(\frac{1}{12}\pi(x - 18)\right)$ en $y_2 = 3$.
Intersect geeft $x = 3{,}421...$ en $x = 20{,}578...$
De lichtintensiteit is gedurende $24 + 3{,}421... - 20{,}578... = 6{,}842...$ uur ofwel 6 uur en 51 minuten groter dan 3 eenheden.

c



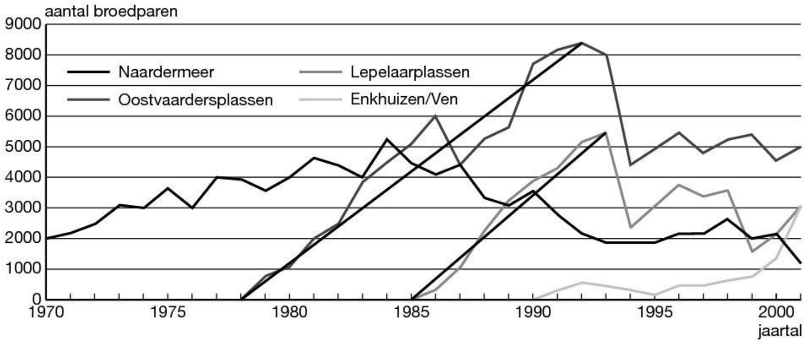
De raaklijn daalt in 24 uur ongeveer 10 eenheden.
De snelheid neemt dus maximaal af met ongeveer 0,4 eenheden per uur.

Bladzijde 208

49 **a** De gemiddelde groei voor de Oostvaardersplassen was $\frac{8400 - 0}{1992 - 1978} = 600$ aalscholvers per jaar.

De gemiddelde groei voor de Lepelaarsplassen was $\frac{5400 - 0}{1993 - 1985} = 675$ aalscholvers per jaar.

De gemiddelde groei voor de Oostvaardersplassen is dus inderdaad kleiner.



De lijn die bij de Oostvaardersplassen hoort is minder steil dan de lijn die bij de Lepelaarsplassen hoort. De gemiddelde groei is dus kleiner voor de Oostvaardersplassen.

Bladzijde 209

b $N = a + b\sin(ct)$

$a = \text{evenwichtsstand} = \frac{5500 - 4500}{2} = 5000$

$b = \text{amplitude} = 5500 - 5000 = 500$

De periode is 3, dus $c = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.

De formule is $N = 5000 + 500\sin\left(\frac{2}{3}\pi t\right)$.

c Aflezen in de figuur van de punten (1974, 3000) en (1985, 5000) waar de trendlijn doorheen gaat.

De helling van de trendlijn is $\frac{5000 - 3000}{11} \approx 182$ en de beginwaarde is 3000, dus $p = 3000$ en $q = 182$.

Van 1974 tot 1982 zijn ongeveer 2,5 perioden, dus de periode is $\frac{8}{2{,}5} = 3{,}2$ jaar, dus $b = \frac{2\pi}{3{,}2} \approx 2{,}0$

Invullen van $t = 1$ en $N = 3600$ geeft $3000 + 182 \cdot 1 + a \cdot \sin(2{,}0 \cdot 1) = 3600$ en dat geeft $a \approx 460$.
Dus $p = 3000$, $q = 182$, $a = 460$ en $b = 2{,}0$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 210

50 **a** De evenwichtstand is $\frac{26 + 3}{2} = 14{,}5$, dus $a = 14{,}5$.
De amplitude is $26 - 14{,}5 = 11{,}5$, dus $b = 11{,}5$.
Twee keer de periode is $230 - 24 = 206$ meter, dus de periode is 103 meter en dus is $c = \frac{2\pi}{103} \approx 0{,}061$.
De grafiek snijdt de y-as in een laagste punt, dus het beginpunt ligt een kwart periode naar rechts vanaf de y-as.
Dus $d = \frac{1}{4} \cdot 103 = 25{,}75$.

Bladzijde 211

b De y-as is over een afstand van $103 + 12 = 115$ meter naar links verschoven, dus de grafiek schuift 115 naar rechts. De waarde van d wordt dus $-25{,}75 - 115 = 104{,}75$.
De formule wordt $y = 14{,}5 + 11{,}5\sin(0{,}061(x - 104{,}75))$.
c De x-coördinaat van B is 15, dus de afstand AB is 30 meter.
d Het hoogste punt van het wegdek is ter hoogte van de y-as, dus $q = 7{,}5$.
A ligt op de sinusoide, dus $y_A = 14{,}5 + 11{,}5\sin(0{,}061(-15 - 25{,}75)) \approx 7{,}487$.

$$\left.\begin{array}{l} y = px^2 + 7{,}5 \\ \text{door } (-15;\ 7{,}487) \end{array}\right\} \begin{array}{l} p \cdot (-15)^2 + 7{,}5 = 7{,}487 \\ 225p = -0{,}013 \\ p = \frac{-0{,}013}{225} \approx -0{,}000058 \end{array}$$

Dus $p = -0{,}000058$ en $q = 7{,}5$.

51 **a** $0{,}73^n > 0$ voor alle waarden van n, dus de teller van $D'(n)$ is positief.
De noemer is een kwadraat, dus de noemer van $D'(n)$ is ook positief.
Dus $D'(n) > 0$ voor alle waarden van n.
De grafiek van D is dus stijgend, dus de downloadverkoop stijgt.
b $C(n)$ is een meetkundige rij met $C(0) = 18{,}0$ en $r = 0{,}91$.
De directe formule is $C(n) = 18{,}0 \cdot 0{,}91^n$.
Los op $\frac{19{,}0}{1 + 26{,}14 \cdot 0{,}73^n} = 18{,}0 \cdot 0{,}91^n$.
Voer in $y_1 = \frac{19{,}0}{1 + 26{,}14 \cdot 0{,}73^x}$ en $y_2 = 18{,}0 \cdot 0{,}91^x$.
Intersect geeft $x \approx 9{,}1$, dus in 2018 is het aantal verkochte cd's voor het eerst kleiner dan het aantal downloadverkopen.

Bladzijde 212

52 **a** De evenwichtstand is $\frac{17{,}1 + 2{,}6}{2} = 9{,}85$, dus $a = 9{,}85$.
De amplitude is $17{,}1 - 9{,}85 = 7{,}25$, dus $b = 7{,}25$.
De periode is 365 dagen, dus $c = \frac{2\pi}{365} \approx 0{,}0172$.
De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand na 106 dagen, dus $d = 106$.
b De gemiddelde dagtemperatuur is het hoogst voor $t = 106 + \frac{1}{4} \cdot 365 \approx 197$.
c In de nieuwe formule wordt $a = 9{,}85 + 2 = 11{,}85$, dus $T = 11{,}85 + 7{,}25\sin(0{,}0172(t - 106))$.
Los op $y_1 = 11{,}85 + 7{,}25\sin(0{,}0172(x - 106))$ en $y_2 = 16$.
Intersect geeft $x = 141{,}43...$ en $x = 253{,}21...$
$253{,}21... - 141{,}43... \approx 112$, dus 112 dagen met een gemiddelde temperatuur van ten minste 16 °C.
Dat is een toename van 47 dagen.

Bladzijde 213

53 **a** Voer in $y_1 = 4 + 128\sin(0{,}51(x + 5{,}4))$.
De optie maximum geeft $x \approx 22{,}3...$, dus om 22:19 uur.
Het maximum in de grafiek treedt op om 22:40 uur.
Het verschil is dus 21 minuten.
b De open stippen zijn gelijkmatig verdeeld over de horizontale as. Er liggen ongeveer evenveel open stippen boven als onder de horizontale as. Grafiek 1 geeft dus in de helft van de gevallen een te lage en in de helft van de gevallen een te hoge schatting.

15

c De evenwichtstand is 0, dus $a = 0$.
De amplitude is 21, dus $b = 21$.
De periode is 6,2 uur, dus $c = \frac{2\pi}{6{,}2} \approx 1{,}01$.
De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand na 0,8 uur, dus $d = 0{,}8$.
De formule voor grafiek 2 is $w = 21\sin(1{,}01(t - 0{,}8))$.
De nieuwe formule voor de waterstand is $w = 5 + 152\sin(0{,}51(t - 8{,}5)) + 21\sin(1{,}01(t - 0{,}8))$.

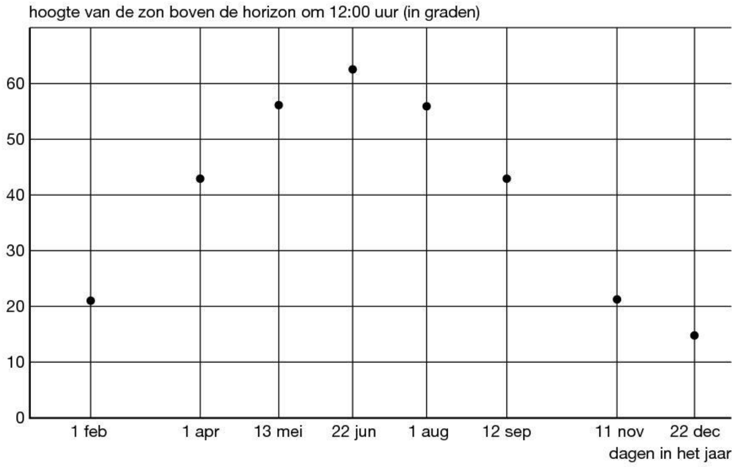
Bladzijde 214

54 **a** Baan D bereikt om 08:00 uur een hoek van 30°.
Baan D hoort bij 1 mei en 13 augustus, dus in de periode van 1 mei tot en met 13 augustus.

Bladzijde 215

b

zonnebaan	**A** 22 jun	**B** 13 mei 1 aug	**F** 1 apr 12 sep	**K** 1 feb 11 nov	**M** 22 dec
hoogte van de zon boven de horizon om 12:00 uur (in graden)	62,5	56	43	21	15



c Stel $H = a + b\sin(c(t - d))$.
De evenwichtsstand is $\frac{55 + 11}{2} = 33$, dus $a = 33$.
De amplitude is $55 - 33 = 22$, dus $b = 22$.
De periode is 365 dagen, dus $c = \frac{2\pi}{365} \approx 0{,}017$.
De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 75$, dus $d = 75$.
Dus $H = 33 + 22\sin(0{,}017(t - 75))$.

Bladzijde 216

55 **a** Los op $12{,}14 + 3{,}12\sin(0{,}0172(t - 80)) = 14$.
Voer in $y_1 = 12{,}14 + 3{,}12\sin(0{,}0172(x - 80))$ en $y_2 = 14$.
Intersect geeft $x \approx 117{,}1$ en $x \approx 225{,}5$ dus vanaf dag 118 tot en met dag 225.
Dat zijn dus 108 dagen.

b De vroegste zonsopgang is bij $t = 6{,}59 - 1{,}03 = 5{,}56$, dus om 5:34 uur.
De laatste zonsopgang is bij $t = 6{,}59 + 1{,}03 = 7{,}62$, dus om 7:37 uur.

c $Zononder_{Rome} = Zonop_{Rome} + Dag_{Rome}$
$= 6{,}59 - 1{,}03\sin(0{,}0172(t - 80)) + 12{,}14 + 3{,}12\sin(0{,}0172(t - 80))$
$= 18{,}73 + 2{,}09\sin(0{,}0172(t - 80))$
2,09 is groter dan 1,03, dus de verschillen in zonsondergangtijden hebben meer invloed dan de verschillen in zonsopgangtijden.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 217

d De evenwichtsstand is $\frac{18{,}85 + 5{,}90}{2} = 12{,}375$, dus $a = 12{,}375$.
De amplitude is $18{,}85 - 12{,}375 = 6{,}475$, dus $b = 6{,}475$.
De periode is gelijk aan die van Rome, dus $c = 0{,}0172$.

e Los op $12{,}375 + 6{,}475\sin(0{,}0172(t - 80)) = 14$.
Voer in $y_1 = 12{,}375 + 6{,}475\sin(0{,}0172(x - 80))$ en $y_2 = 14$.
Intersect geeft $x \approx 94{,}7$ en $x \approx 247{,}9$, dus vanaf dag 95 tot en met dag 247.
Dat zijn 153 dagen, dus het aantal dagen lekker lang licht is in Oslo groter dan in Rome.

56 **a**

4	5	6
97	96	95
515	521	526
2030	2551	3077

Het totaalbedrag na ronde 6 is 3077 euro.

b $B_n = B_{n-1} + \frac{50\,000}{101 - n}$ met $B_0 = 0$

TI
Voer in $u(n) = u(n - 1) + \frac{50\,000}{101 - n}$
met nMin = 0 en u(nMin) = 0.

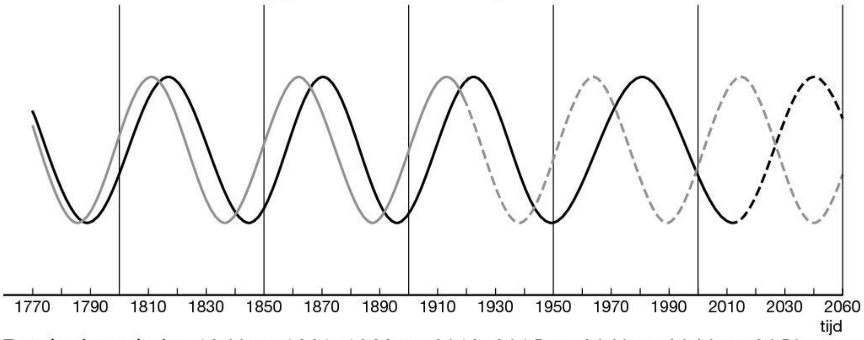
Casio
Voer in $a_{n+1} = a_n + \frac{50\,000}{101 - n}$
met Start: 0 en a_0: 0.

De 100e term is $B(100) \approx 259\,369$.
Dus het maximale bedrag is 259 369 euro.

Bladzijde 218

57 **a** Aflezen uit de figuur geeft een periode van ongeveer 51 jaar.
In $1913 + 2 \cdot 51 = 2015$ is er een maximum en in 1989 is er een minimum.
Het crisisjaar 2009 ligt vlak voor de top, dus in 2009 is geen sprake van een economische neergang.

b Tussen 1950 en 2050 heeft de golfbeweging volgens Barker maxima in 1981 en 2044 en een minimum in 2012.
Tussen 1950 en 2050 heeft de golfbeweging volgens Kondratieff maxima in 1964 en 2015 en minima in 1989 en 2040.
Een ruwe schets met deze gegevens ziet er als volgt uit.



Dus in de perioden 1964 tot 1981, 1989 tot 2012, 2015 tot 2040 en 2044 tot 2050.

Bladzijde 219

c Stel $B = \sin(c(t - d))$.
De periode is 51 jaar, dus $c = \frac{2\pi}{51}$.
De grafiek gaat stijgend door de evenwichtstand in $1913 + 0{,}75 \cdot 51 \approx 1951$, dus $d = 1951$.
De formule is $B = \sin\left(\frac{2\pi}{51}(t - 1951)\right)$.

d De periode van de golf na 2015 is $\frac{2}{3} \cdot 30 = 20$ jaar, dus die duurt tot 2035.
De golf die daarop volgt duurt $\frac{2}{3} \cdot 20 \approx 13{,}3$ jaar en duurt tot 2048.
Het jaar 2040 valt in die laatste periode.
$\frac{13{,}3}{4} \approx 3{,}3$ jaar, dus de zomer duurt van 2038 tot 2041.
Het jaar 2040 valt dus in de zomer.

© Noordhoff Uitgevers bv

e De lengten van de perioden vormen een meetkundige rij met $u_0 = 30$ en $r = \frac{2}{3}$, dus $u_n = 30 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
Voer in $y_1 = 30 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$.
Aflezen in de tabel geeft $u(8) \approx 1{,}17$ en $u(9) \approx 0{,}78$.
Dus de negende periode na 2015 is de eerste die korter is dan één jaar.
Voor het jaar waarin die periode begint moet de som van de eerste 8 perioden na 2015 berekend worden, dus neem beginwaarde 20.

TI Voer in
$u(n) = 20 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ met nMin = 0
en $v(n) = v(n-1) + 30 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ met v(nMin) = 20.
Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{7} u_k \approx 57{,}7$.

Casio Voer in $a(n) = 20 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ met Start: 20.
Aflezen bij Σa_n in de tabel geeft $\sum_{k=0}^{7} u_k \approx 57{,}7$.

2015 + 57,7 = 2072,7, dus in het jaar 2072 begint de eerste periode die korter is dan één jaar.

Bladzijde 220

58 **a** De recursieve formule voor de rij is $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ met $f_1 = 1$ en $f_2 = 1$.

TI
Voer in $u(n) = u(n-1) + u(n-2)$
met nMin = 1 en u(nMin) = {1, 1}.

Casio
Voer in $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$
met Start: 1 en a_1: 1 en a_2: 1.

Dit geeft $u_{11} = 89$, $u_{12} = 144$, $u_{14} = 377$ en $u_{15} = 610$.
De termen 12 tot en met 14 liggen tussen 100 en 500. Dat zijn dus drie getallen.

b $\frac{13}{8} = 1{,}625$; $\frac{21}{13} \approx 1{,}61538$; $\frac{34}{21} \approx 1{,}61905$; $\frac{55}{34} \approx 1{,}61765$; $\frac{89}{55} \approx 1{,}61818$; $\frac{144}{89} \approx 1{,}61798$; $\frac{233}{144} \approx 1{,}61806$;
Dus vanaf de getallen 144 en 233.

Bladzijde 221

c Bij 'De Nachtwacht' is de verhouding $v = \frac{437}{363} = 1{,}203...$ en $A = \left(\frac{1}{1{,}203...} - 1\right) \cdot \log\left(1 - \frac{1}{1{,}203...}\right) \approx 0{,}131$.
Bij 'Oog' is de verhouding $v = \frac{198}{141} \approx 1{,}404$ en $A = \left(\frac{1}{1{,}404} - 1\right) \cdot \log\left(1 - \frac{1}{1{,}404}\right) \approx 0{,}156$.
De appreciatiewaarde van 'Oog' is groter.

d Los op $\left(\frac{1}{v} - 1\right) \cdot \log\left(1 - \frac{1}{v}\right) = 0{,}1544$.
Voer in $y_1 = \left(\frac{1}{x} - 1\right) \cdot \log\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ en $y_2 = 0{,}1544$.
Intersect geeft $x = 1{,}382...$ en $x = 1{,}877...$
De bij deze verhoudingen horende kortste zijden zijn $\frac{762}{1{,}382...} \approx 551$ cm en $\frac{762}{1{,}877...} \approx 406$ cm.
Omdat de kortste zijde meer dan drie meter korter is dan de langste zijde, is de kortste zijde 406 cm.

e De optie maximum geeft $x = 1{,}581...$, dus het verschil is $1{,}618 - 1{,}581... \approx 0{,}036$.

f Bij $v = 1{,}203...$ hoort $A \approx 0{,}131$. Invullen van $v = 1{,}203...$ in de drie formules geeft
A: $A \approx 0{,}131$, B: $A \approx -0{,}131$ en C: $A = -4{,}555$.
Formule A is dus de juiste formule.

Bladzijde 222

59 **a** $t = 1850$ geeft $N = 0{,}0101 \cdot 1{,}0065^{1850} \approx 1621$
Het procentuele verschil is $\frac{1621 - 1265}{1265} \times 100\% \approx 28{,}1\%$.
$t = 1950$ geeft $N = 0{,}0101 \cdot 1{,}0065^{1950} \approx 3099$
Het procentuele verschil is $\frac{3099 - 2516}{2516} \times 100\% \approx 23{,}2\%$.
De procentuele afwijking is het grootst in 1850.

b Los op $0{,}0101 \cdot 1{,}0065^t = 20\,000$.
Voer in $y_1 = 0{,}0101 \cdot 1{,}0065^x$ en $y_2 = 20\,000$.
Intersect geeft $x \approx 2237{,}8$, dus in het jaar 2238.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 223

c $g = \left(\frac{2516}{1656}\right)^{\frac{1}{50}} = 1{,}0084004...$, dus het groeipercentage is 0,8400% per jaar.

d Bij de jaren 1750 tot 1850 hoort de formule $N = 795 \cdot 1{,}004656^t$ met $t = 0$ in 1750.
Los op $795 \cdot 1{,}004656^t = 1000$.
Voer in $y_1 = 795 \cdot 1{,}004656^x$ en $y_2 = 1000$.
Intersect geeft $x \approx 49{,}4$, dus in het jaar 1750 + 49 = 1799 was het aantal voor het eerst meer dan één miljard.

e Het aantal geboortes G per jaar is $G = 0{,}023 \cdot 5760 \cdot 1{,}01092^t = 132{,}48 \cdot 1{,}01092^t$.

TI Voer in $u(n) = 0{,}023 \cdot 5760 \cdot 1{,}01092^n$ met nMin = 0
en $v(n) = v(n-1) + 0{,}023 \cdot 5760 \cdot 1{,}01092^n$ met v(nMin) = 132,48.

Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{7} u_k \approx 1101$.

Casio Voer in $a(n) = 0{,}023 \cdot 5760 \cdot 1{,}01092^n$ met Start: 132,48.

Aflezen bij Σa_n in de tabel geeft $\sum_{k=0}^{7} u_k \approx 1101$.

Dus het aantal geboortes was in deze periode ongeveer 1101 miljoen.

15.6 De pilotexamens van 2016

2016 – tijdvak 1 (pilot)

Bladzijde 224

1 $30\,012 \cdot 360 \cdot 30 + 6961 \cdot 285 \cdot 30 = 383\,646\,150$ gram $\approx 383\,646$ kg
In totaal aten de aalscholvers ongeveer 384 duizend kg vis.

Bladzijde 225

2 $O = 3{,}4$ geeft $L = -11{,}31 + 22{,}14 \cdot 3{,}4 = 63{,}966$
$\ln(G) = -12{,}911 + 3{,}335 \cdot \ln(63{,}966) = 0{,}9571...$
$G = e^{0{,}9571...} \approx 2{,}6$, dus het gewicht van de pos is 2,6 gram.

3 $\left.\begin{array}{l}\ln(G) = -13{,}431 + 3{,}396 \cdot \ln(L) \\ \ln(L) = 3{,}896 + 0{,}734 \cdot \ln(K)\end{array}\right\}$ $\ln(G) = -13{,}431 + 3{,}396 \cdot (3{,}896 + 0{,}734 \cdot \ln(K))$
$= -13{,}431 + 13{,}230816 + 2{,}492664 \cdot \ln(K)$
$= -0{,}200184 + 2{,}492664 \ln(K)$
$G = e^{-0{,}200184 + 2{,}492664 \ln(K)} = e^{-0{,}200184} \cdot (e^{\ln(K)})^{2{,}492664} \approx 0{,}819 \cdot K^{2{,}493}$
Dus $G = 0{,}819 \cdot K^{2{,}493}$.

4 $L = 49{,}2 \cdot K^{0{,}734}$ geeft $L' = 49{,}2 \cdot 0{,}734 \cdot K^{-0{,}266} = 36{,}1128 \cdot K^{-0{,}266}$
L' is positief, dus de grafiek van L is stijgend.
Als K toeneemt, dan neemt $K^{-0{,}266}$ af, dus dan neemt $36{,}1128 \cdot K^{-0{,}266}$ af. De grafiek van L' is dus dalend.
De grafiek van L is dus afnemend stijgend.
De vislengte neemt steeds minder toe bij een toenemende kauwplaatlengte.

5 Los op $15{,}3G + 679 < 11{,}6G + 879$
$3{,}7G < 200$
$G < 54$
Dus gewichten van 40 tot en met 54 kg.

Bladzijde 226

6 Bij een snelheid van 25 km/uur hoort een energieverbruik van $10 + \frac{2}{4} = 10{,}5$ kcal/kg/uur.
Hij fietst in totaal $\frac{240}{25} = 9{,}6$ uur.
Daarmee verbruikt hij $10{,}5 \cdot 9{,}6 \cdot 70 = 7056$ kcal.
Dus $B = 11{,}6 \cdot 70 + 879 = 1691$ en $T = 1{,}3 \cdot 1691 + 7056 \approx 9254$.
Het totale energieverbruik is 9254 kcal.

7 Bij een snelheid van 14 km/uur duurt het afleggen van 1 km $\frac{1}{14}$ uur en daarmee wordt $4 \cdot \frac{1}{14} \approx 0{,}29$ kcal/kg/km verbruikt.
Bij een snelheid van 42 km/uur duurt het afleggen van 1 km $\frac{1}{42}$ uur en daarmee wordt $20 \cdot \frac{1}{42} \approx 0{,}48$ kcal/kg/km verbruikt.
Bij een hogere snelheid hoort een hoger energieverbruik, dus Bert heeft gelijk.

8 10 km fietsen, 4 km hardlopen en 1 km zwemmen kosten evenveel energie.
Dat is een totale afstand van 10 + 4 + 1 = 15 km.
Alle afstanden moeten $\frac{21}{15} = 1{,}4$ keer zo lang worden.
Dus $10 \cdot 1{,}4 = 14$ km fietsen, $4 \cdot 1{,}4 = 5{,}6$ km hardlopen en 1,4 km zwemmen.

15

Bladzijde 228

9 Uit de recht evenredigheid volgt dat q groter wordt als p groter wordt. Conclusie 1 volgt dus inderdaad uit het recht evenredige verband.
Uit de recht evenredigheid volgt dat als p twee keer zo klein wordt, dat dan ook q twee keer zo klein wordt.
Dus $15 - q$, ofwel AD, wordt dan groter. Conclusie 2 volgt dus niet uit het recht evenredige verband.

10 Aflezen van het punt (15; 2,3) geeft $a = \frac{2{,}3}{15} \approx 0{,}15$.

11 $T = 0{,}143 \cdot (15 - q) + \sqrt{400 + q^2} = 2{,}145 - 0{,}143q + \sqrt{400 + q^2}$ geeft
$\frac{dT}{dq} = -0{,}143 + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{400 + q^2}} \cdot 2q = -0{,}143 + \frac{q}{\sqrt{400 + q^2}}$
Los op $\frac{dT}{dq} = 0$.
Voer in $y_1 = -0{,}143 + \frac{x}{\sqrt{400 + x^2}}$.
De optie zero of ROOT geeft $x = 2{,}889...$
Dus Elvis moet na $15 - 2{,}889... \approx 12{,}1$ meter in het water springen.

12 $\frac{dT}{dq} = 0$ geeft $\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} = 0{,}143$

$$\sqrt{p^2 + q^2} = \frac{q}{0{,}143}$$
$$p^2 + q^2 = \left(\frac{q}{0{,}143}\right)^2$$
$$p^2 + q^2 = 48{,}90...q^2$$
$$47{,}90...q^2 = p^2$$
$$6{,}92...q = p$$
$$q \approx 0{,}14p$$

Dus $q = 0{,}14p$.

Bladzijde 229

13 $N(7) = {}^4\log\left(\frac{13}{13 - 7}\right) \approx 0{,}558$, dus ongeveer 558 000 geocaches.
Dat zijn er 58 000 meer dan in werkelijkheid.

14 $N = {}^4\log\left(\frac{13}{13 - t}\right)$ geeft $\frac{13}{13 - t} = 4^N$

$$13 - t = \frac{13}{4^N}$$
$$t = 13 - \frac{13}{4^N}$$
$$t = 13 - 13 \cdot 4^{-N}$$

Dus $a = 13$, $b = 13$ en $c = 4$.

© Noordhoff Uitgevers bv

15 In de formule van het eerste model kan t niet 13 of groter zijn. Het model is bruikbaar tot 1 januari 2013. Het is nu dus niet meer bruikbaar.

16 Als t heel groot is, dan is $e^{-0,3t} \approx 0$, dus dan is $1 + 87 \cdot e^{-0,3t} \approx 1$ en dan is dus $M = \frac{5,6}{1 + 87 \cdot e^{-0,3t}} \approx \frac{5,6}{1} = 5,6$.
De waarde van M verandert op den duur dus niet meer, dus de stijging van het aantal geocaches zal op den duur heel klein zijn.

Bladzijde 230

17 De amplitude is 0,37, dus het hoogteverschil tussen het hoogste en laagste punt is $2 \cdot 0,37 = 0,74$ m.

Bladzijde 231

18 De lengte van de tweede golf is $2,5 \cdot 1,4 = 3,5$ meter.
Stel $h = a + b\sin(c(x - d))$.
a = evenwichtsstand = 1,37
b = amplitude = 0,37
De periode is 3,5, dus $c = \frac{2\pi}{3,5}$.
De tweede golf gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 2,5 + 0,25 \cdot 3,5 = 3,375$.
De formule is $h = 1,37 + 0,37\sin\left(\frac{2\pi}{3,5}(x - 3,375)\right)$ met $2,5 \leq x \leq 6$.

19 TI — Voer in $u(n) = 2,5 \cdot 1,4^{n-1}$ met nMin = 1
en $v(n) = v(n - 1) + 2,5 \cdot 1,4^{n-1}$ met v(nMin) = 2,5.
Lees af in de tabel $\sum_{k=1}^{6} u_k \approx 40,81$.

Casio — Voer in $a(n) = 2,5 \cdot 1,4^{n-1}$ met Start: 2,5.
Aflezen bij Σa_n in de tabel geeft $\sum_{k=1}^{6} u_k \approx 40,81$.

Dus de totale lengte van de eerste zes golven is 40,81 m.

20 $S_n = \frac{2,5 \cdot (1,4^n - 1)}{1,4 - 1} = \frac{2,5 \cdot (1,4^n - 1)}{0,4} = 6,25 \cdot (1,4^n - 1) = 6,25 \cdot 1,4^n - 6,25$
Dus $a = 6,25$ en $b = -6,25$.

Bladzijde 232

21 Vanuit de hoekpunten kun je 7 lijnstukjes tekenen. Er zijn 4 hoekpunten, dus $4 \cdot 7 = 28$ lijnstukjes. Elk lijnstukje is dubbel geteld, dus vanuit de hoekpunten kun je 14 lijnstukjes tekenen.
Vanuit een punt op de zijde kun je 11 lijnstukjes tekenen. Er zijn 12 punten op de zijde, dus $11 \cdot 12 = 132$ lijnstukjes. Elk lijnstukje is dubbel geteld, dus vanuit de punten op de zijden kun je 66 lijnstukjes tekenen.
In totaal kun je dus $66 + 14 = 80$ lijnstukjes tekenen.
De kleuren wit en zwart kunnen aan beide kanten van het lijnstukje voorkomen, dus in totaal zijn er $80 \cdot 2 = 160$ verschillende vierkanten.

2016 – tijdvak 2 (pilot)

Bladzijde 233

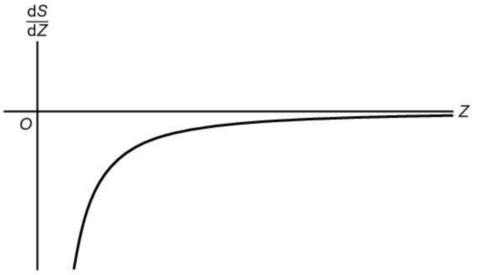
1 De tekst bestaat uit drie zinnen, dus $Z = 3$, dus $S = 1,0430 \cdot \sqrt{14 \cdot \frac{30}{3}} + 3,1291 \approx 15$.

2 Er moet gelden $0,85 \cdot M \cdot \frac{30}{Z} = M \cdot \frac{30}{aZ}$. Hieruit volgt $a = \frac{1}{0,85} \approx 1,176$.
Het aantal zinnen moet dus 17,6% groter zijn.

3 Omdat $1,0430 \cdot \sqrt{M \cdot \frac{Z}{30}} + 3,1291$ constant is, is $\sqrt{M \cdot \frac{Z}{30}}$ constant, dus $M \cdot \frac{Z}{30}$ is ook constant.
Uit $M \cdot \frac{Z}{30} = c$ volgt $Z = \frac{30M}{c} = \frac{30}{c} \cdot M$. Deze formule is van de vorm Z = constante $\cdot M$.

15

4 $S = 49{,}47 \cdot Z^{-\frac{1}{2}} + 3{,}1291$ geeft $\frac{dS}{dZ} = -\frac{1}{2} \cdot 49{,}47 \cdot Z^{-1\frac{1}{2}}$.



De grafiek van $\frac{dS}{dZ}$ ligt onder de Z-as, dus de grafiek van S is dalend.
De grafiek van $\frac{dS}{dZ}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van S is afnemend dalend.

Bladzijde 234

5 In beide perioden is de daling 6 euro per 1000 kg. Omdat in week 3 de marktprijs lager is dan in week 13, is de procentuele afname van week 3 naar 4 dus groter.

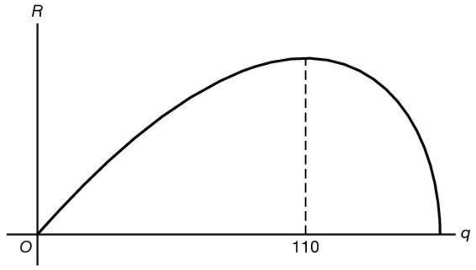
6 De formule heeft betekenis als de prijs groter is dan 0, dus los op $10\sqrt{-23q + 3800} = 0$.
$10\sqrt{-23q + 3800} = 0$
$\sqrt{-23q + 3800} = 0$
$-23q + 3800 = 0$
$23q = 3800$
$q \approx 165{,}2$
De grootste gehele waarde van q is dus 165.

7 $10\sqrt{-23q + 3800} = 232$
$\sqrt{-23q + 3800} = 23{,}2$
$-23q + 3800 = 538{,}24$
$-23q = -33261{,}76$
$q = 141{,}815...$

$10\sqrt{-23q + 3800} = 238$
$\sqrt{-23q + 3800} = 23{,}8$
$-23q + 3800 = 566{,}44$
$-23q = -3233{,}56$
$q = 140{,}589...$

De afname van q is $141{,}815... - 140{,}589... \approx 1{,}23$.
De vraag neemt dus af met 1230 kg.

8 Voor de totale opbrengst R geldt $R = pq$.
Dit geeft $R = 10q\sqrt{-23q + 3800}$.
Voer in $y_1 = 10x\sqrt{-23x + 3800}$.
De optie maximum geeft $x \approx 110$.
Dus de opbrengst is maximaal als $q = 110$ en
$p = 10\sqrt{-23 \cdot 110 + 3800} \approx 356$ euro.



Bladzijde 235

9 $g_{\text{twee weken}} = \frac{21}{4{,}7}$, dus $g_{\text{week}} = \left(\frac{21}{4{,}7}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 2{,}114$.

Het gewicht neemt per week met 111,4% toe.

10 Bereken bijvoorbeeld $\frac{480}{160} = 3$ en $\frac{1700}{990} \approx 1{,}7$.
De perioden bij deze quotiënten zijn gelijk, maar de uitkomsten niet.
Er is dus geen sprake van exponentiële groei.

© Noordhoff Uitgevers bv

11 $M = -7{,}131 + 11{,}305 \cdot L - 2{,}892 \cdot L^2$ geeft $M' = 11{,}305 - 5{,}784 \cdot L$
$M' = 0$ geeft $11{,}305 - 5{,}784L = 0$
$5{,}784L = 11{,}305$
$L = 1{,}954...$
$L = 1{,}954...$geeft $t = 10^{1{,}954...} \approx 90$
Een zwangerschap duurt nooit 90 weken, dus het is voor dit model geen bezwaar.

Bladzijde 236

12 $\log(G) = -1{,}314 + 3{,}075 \cdot \log(t)$
$G = 10^{-1{,}314 + 3{,}075 \cdot \log(t)}$
$G = 10^{-1{,}314} \cdot 10^{3{,}075 \cdot \log(t)}$
$G = 10^{-1{,}314} \cdot (10^{\log(t)})^{3{,}075}$
$G = 0{,}0485 \cdot t^{3{,}075}$

Bladzijde 237

13 In oktober is het verschil tussen het model en de werkelijke maandopbrengst het grootst. In de maanden met een werkelijke maandopbrengst die kleiner is dan in oktober is het relatieve verschil tussen het model en de werkelijke maandopbrengst duidelijk kleiner dan in oktober.
Het verschil tussen het model en de werkelijke maandopbrengst in oktober is $65 - 48 = 17$ kWh.
De relatieve afwijking in oktober is $\frac{17}{48} \times 100\% \approx 35{,}4\%$.

14 Stel $M = a + b\sin(c(t - d))$.
a evenwichtstand $= \frac{19 + 129}{2} = 74$
b = amplitude $= 129 - 74 = 55$
De periode = 12, dus $c = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$
De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 3$.
De formule is $M = 74 + 55\sin\left(\frac{1}{6}\pi(t - 3)\right)$.

15 Los op $6{,}34 + 4{,}19\sin(0{,}0172(t - 74)) = 10$.
Voer in $y_1 = 6{,}34 + 4{,}19\sin(0{,}0172(x - 74))$ en $y_2 = 10$.
Intersect geeft $x \approx 135{,}8$ en $x \approx 194{,}9$.
Dus van de 136^e^ dag tot en met de 194^e^ dag.
De gemiddelde dagopbrengst is dus 59 dagen groter dan 10 kWh.

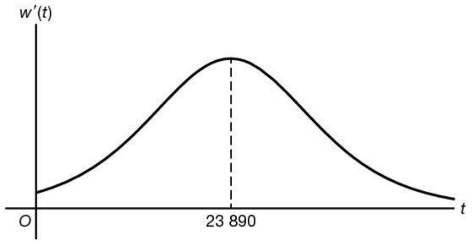
Bladzijde 238

16 Los op $15 + \frac{4}{1 + 36 \cdot e^{-0{,}00015t}} = 18$.
Voer in $y_1 = 15 + \frac{4}{1 + 36 \cdot e^{-0{,}00015x}}$ en $y_2 = 18$.
Intersect geeft $x \approx 31\,214$.
$\frac{31\,214}{365} \approx 85{,}5$, dus in het jaar 1985 zou het record voor het eerst boven de 18 meter uitkomen.

17 Als t heel groot is, dan is $e^{-0{,}00015t} \approx 0$ en dan is $1 + 36 \cdot e^{-0{,}00015t} \approx 1$. Dus dan is $w \approx 15 + \frac{4}{1} = 19$.
De grenswaarde is 19 meter.

18 $w = 15 + \frac{4}{1 + 36 \cdot e^{-0{,}00015t}}$ geeft $w'(t) = \frac{(1 + 36 \cdot e^{-0{,}00015t}) \cdot 0 - 4 \cdot 36 \cdot e^{-0{,}00015t} \cdot -0{,}00015}{(1 + 36 \cdot e^{-0{,}00015t})^2} = \frac{0{,}0216 \cdot e^{-0{,}00015t}}{(1 + 36 \cdot e^{-0{,}00015t})^2}$

19 Voer in $y_1 = \frac{0{,}0216 \cdot e^{-0{,}00015x}}{(1 + 36 \cdot e^{-0{,}00015x})^2}$.
De optie maximum geeft $x \approx 23\,890$.
$\frac{23\,890}{365} \approx 65{,}5$, dus dat was in het jaar 1965.
Dat klopt niet met de werkelijkheid, want rond 1965 steeg het record met slechts 7 cm in ongeveer 8 jaar, terwijl het in 1959 met 33 cm in iets meer dan een jaar steeg.



20 Substitutie van $t = 365j$ in $w = 15 + \dfrac{4}{1 + 36 \cdot e^{-0,00015t}}$ geeft $w = 15 + \dfrac{4}{1 + 36 \cdot e^{-0,00015 \cdot 365j}} = 15 + \dfrac{4}{1 + 36 \cdot e^{-0,05475j}}$.
Dus op de plek van de puntjes moet −0,05475 staan.

Bladzijde 239

21 In de tekst en de figuur zijn de gemiddelde gewichten van de vrouwen en mannen in 1991 en 2011 te vinden.
In 1991 was het gemiddeld gewicht van de vrouwen 66,3 kg en in 2011 was het 70,0 kg.
In 1991 was het gemiddeld gewicht van de mannen 78,4 kg en in 2011 was dit 84,0 kg.
Met behulp van de tabel zijn de bijbehorende lengten te berekenen.

vrouwen 1991:
$\dfrac{66,3}{(\text{gemiddelde lengte})^2} = 23,8013$
$(\text{gemiddelde lengte})^2 = \dfrac{66,3}{23,8013}$
gemiddelde lengte ≈ 1,67 m

vrouwen 2011:
$\dfrac{70,0}{(\text{gemiddelde lengte})^2} = 24,9499$
$(\text{gemiddelde lengte})^2 = \dfrac{70,0}{24,9499}$
gemiddelde lengte ≈ 1,67 m

mannen 1991:
$\dfrac{78,4}{(\text{gemiddelde lengte})^2} = 24,5234$
$(\text{gemiddelde lengte})^2 = \dfrac{78,4}{24,5234}$
gemiddelde lengte ≈ 1,79 m

mannen 2011:
$\dfrac{84,0}{(\text{gemiddelde lengte})^2} = 25,6686$
$(\text{gemiddelde lengte})^2 = \dfrac{84,0}{25,6686}$
gemiddelde lengte ≈ 1,81 m

Het lengteverschil in 1991 was 12 cm en het lengteverschil in 2011 was 14 cm.
Het lengteverschil is dus met 2 cm toegenomen, dat is een toename van 0,1 cm per jaar.
In 2030 is het verschil $14 + 0,1 \cdot 19 = 15,9$ cm.
De bewering is dus niet waar.

© Noordhoff Uitgevers bv